Lösungsskizzen Selbsttest Mathematik

Fachhochschule Ingolstadt

Lösung Aufgabe 1 (Gleichungssysteme)

Die Aufgabe läßt sich auf ein Gleichungssystem zurückführen. Man erhält folgende zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten Variablen x und y: (1) $x+y = 56$ und (2) $2x+3y = 128$. Multipliziert man die erste Gleichung mit zwei, erhält man (1'): $2x+2y = 112$. Subtrahiert man die Gleichung (1') von (2), dann erhält man $y = 16$. Setzt man dies in die Gleichung (1) ein, ergibt sich $x = 40$. Das Zahlenpaar lautet also $(x, y) = (40, 16)$.

Lösung Aufgabe 2 (Potenzen und Wurzeln)

Mit Hilfe der Potenzschreibweise für Wurzeln $\sqrt[p]{c} = c^{\frac{1}{p}}$ und den bekannten Rechenregeln für allgemeine Potenzfunktionen erhält man:

$$x = \sqrt{\sqrt[3]{a^6\, b^{12}}} = [\,(\,a^6\, b^{12}\,)^{\frac{1}{3}}\,]^{\frac{1}{2}} = [\,a^2\, b^4\,]^{\frac{1}{2}} = b^2 a. \tag{1}$$

Für $a = b = \sqrt{2}$ folgt $x = 2\sqrt{2}$. Eine Intervallschachtellung ist eine Folge ineinanderliegender Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$, welche alle die Zahl $x = 2\sqrt{2}$ erhalten. Die Folge der linken Randpunkte steigt dabei monoton, die Folge der rechten Randpunkte fällt dabei monoton. Weiter muß jeweils gelten $a_n^2 < x^2 < b_n^2$. Das heißt $a_2^2 < 8 < b_n^2$. Durch Rechnung findet man für $a_1 = 2.8$, daß $a_1^2 = 7.84$ und für $b_1 = 2.9$, daß $b_1^2 = 8.41$. Weiter hat man für $a_2 = 2.82$, daß $a_2^2 = 7.95524$ und für $b_2 = 2.83$, daß $b_2^2 = 8.0089$. Schließlich haben wir für $a_3 = 2.828$, daß $a_3^2 = 7.997584$ und für $b_3 = 2.829$, daß $b_3^2 = 8.003241$. Es ergeben sich die Intervalle $I_1 = [2.8, 2.9]$ und $I_2 = [2.82, 2.83]$ sowie $I_3 = [2.828, 2.829]$. Der Durchmesser des dritten Intervalls ist $d_3 = 10^{-2}$. Da x in diesem Intervall liegen muß, ist der Fehler bei einer Näherung von x durch $x_3 = 2.828$ kleiner als d_3.

Lösung Aufgabe 3 (Potenzen und Logarithmen)

Mit $\lg(y) = \log_{10}(y)$ bezeichnet man die Umkehrfunktion zur Potenzfunktion $y = 10^x$. Wendet man dies und die Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln an, so ergibt sich:

$$x = \sqrt{10^{2+\lg(x)}} = \sqrt{10^2\ \cdot\ 10^{\log_{10}(9)}} = \sqrt{10^2 \cdot 9} = \sqrt{10^2 \cdot 3^2} = 10 \cdot 3 = 30. \tag{2}$$

Lösung Aufgabe 4 (Analytische Geometrie)

(a) Es sein $P = (1, 2)$ und die Gerade g gegeben durch $y = x$. Es gibt mindestens zwei Arten die Aufgabe zu lösen: Erste Lösungsmöglichkeit: Die Gerade ist die Winkelhalbierende des ersten und dritten Quadranten. Wir betrachten einen Punkt auf dieser. Der muß von der Form $Q = (x, x)$ sein. Der Vektor $\vec{QP} = (1, 2) - (x, x) = (1 - x, 2 - x)$ beschreibt die Strecke von Q nach P. Die Länge dieses Vektors ist gegeben durch $d(x)$. Nach dem Satz von Pythagoras gilt aber:

$$f(x) = d^2(x) = (1 - x)^2 + (2 - x)^2 = 2x^2 - 6x + 5 = 2(x - 1.5)^2 + 3.5\,. \tag{3}$$

Die letzte Formel erhält man durch quadratisches Ergänzen (Scheitelpunktsform der Parabel $f(x)$). Nun überlegt man sich, daß - da die Wurzelfunktion streng monoton ist - man das Minimum von $d(x)$ auch dadurch gewinnt, indem man das Minimum von $f(x)$ berechnet. Da das letztere wegen der Scheitelpunktsform oben bei $x = 1.5$ liegt, ist $L = (1.5, 1.5)$ der Lotfußpunkt, wenn man von P auf die Gerade g das Lot fällt. Der gesuchte Abstand ergibt sich dann wieder mit Pythagoras:

$$d(1.5) = \sqrt{(1-1.5)^2 + (2-1.5)^2} = \sqrt{0.25+0.25} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0.7071. \tag{4}$$

Zweite Lösungsmöglichkeit: Wir wissen aber auch, daß sich der Lotfußpunkt mit Hilfe des Skalarproduktes von Vektoren berechnen läßt, welches bekanntlich durch folgenden Ausdruck gegeben ist $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$. Ist $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ der Vektor, welche g aufspannt und auf Eins normiert ist, so berechnet sich der Lotfußpunkt gemäß $L = (P \cdot \vec{e})\,\vec{e}$ und der Abstand nach Pythagoras durch die Länge von $\vec{LP}$. Diese Berechnung muß man nur noch durchführen: Es gilt $L = [\frac{1}{2}(1,2)\cdot(1,1)]\,(1,1) = 1.5\,(1,1)$. Dies hatten wir auch oben erhalten. Der Rest der Aufgabe ist dann wie oben zu bearbeiten.

(b) Die Fläche hat das von den Vektoren $\vec{x_1} = [1,1]$ und $\vec{x_2} = [2,3]$ aufgespannte Paralleleogramms, kann man über die Determinante der beiden Vektoren berechnen:

$$A \;=\; \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 1\cdot 3 - 1\cdot 2 = 1. \tag{5}$$

(c) Schlußbemerkung: Im ersten Lösungsweg braucht man nicht unbedingt $f(x)$ zu minimieren. Man kann das auch für $d(x)$ tun, mit Methoden der Differentialrechnung. Eine Herleitung der oben in (b) genutzten Determinantenformel befindet sich im Anhang (Handskizze).

Lösung Aufgabe 5 (Trigonometrie)

Wir sollen den Kosinus zum Bogenmaß $\alpha = \frac{\pi}{12}$ bestimmen, was einem Winkel von fünfzehn Grad entspricht. Den Kosinus des doppelten Winkels $2\alpha = \frac{\pi}{6}$, nämlich dreißig Grad kennen wir. Es ist nämlich aus der Elementargeometrie bekannt, daß $\cos(2\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. * Wir benutzen deswegen ein Additionstheorem, welches in den Formelsammlungen zu finden ist: $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$. Da $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ (Satz von Pythagoras), können wir dieses Additionstheorem auch schreiben als $\cos(2\alpha) = 2\cos^2 -1$ oder $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(\cos(2\alpha)+1)$. Folglich erhalten wir für die gesuchte Größe durch Wurzelziehen $\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos(2\alpha)+1}$. Damit haben wir insgesamt:

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{3}+1} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \approx 0.9659. \tag{6}$$

Lösung Aufgabe 6 (Differenzieren)

Ein Kreis ist eine Punktmenge, bei der alle Punkte einen festen Abstand von einem Mittelpunkt haben. In unserem Falle ist dieser der Koordinatenursprung, und der Abstand ist der Radius $r = 2$ [cm]. Nach Pythagoras kann der Kreis also durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 4$ (Kreisgleichung) beschrieben werden. Die Winkelhalbierende des ersten und dritten Quadranten schneidet den Kreis im Punkt $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Dies sieht man, indem man in der Kreisgleichung $y = x$ setzt und x dann ausrechnet. Für die Aufgabe gibt es nun wieder zwei Lösungen:

* Letzteres kann man einsehen, indem man das Dreieck $0PQ$ betrachtet, wo 0 der Nullpunkt, P der Punkt auf dem Einheitskreis im ersten Quadranten mit "Bogenlänge" 2α zu $(1,0)$ ist und Q die Projektion von P auf die x -Achse. Spiegelt man dieses Dreieck an der x-Achse, entsteht ein Dreieck, dessen Innenwinkel alle sechzig Grad haben. Das Dreieck ist daher gleichseitig. Folglich gilt $2\sin(2\alpha) = 1$ oder $\cos^2(2\alpha) = 1 - \sin^2(2\alpha) = 0.75$. Zieht man die Wurzel, folgt das Resultat. Dies ist bei der Lösung der Aufgabe nicht verlangt zu wissen, sondern hier nur zur Erläuterung angeführt. Skizze im Anhang.

Erste Lösungsmöglichkeit: Aus der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 4$ leitet man die zugehörige Funktionsgleichung für den Kreis $y(x) = \sqrt{4 - x^2}$ im ersten Quadranten ab. Differenziert man diese folgt mit der Kettenregel, folgt:

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{4 - x^2} = \frac{d}{dx}(4 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{y(x)}. \tag{7}$$

Einfacher kann man das auch durch implizites Differenzieren der Kreisgleichung sehen, nämlich $(x^2 + y^2)' = 0$ oder $2x + 2yy' = 0$, was auch auf $y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$ führt. Man muß nun nur noch den Punkt $x = \sqrt{2}$ einsetzen und erhält als Steigung der Tangente im Schnittpunkt

$$y'(\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1. \tag{8}$$

Zweite Lösungsmöglichkeit: Diese ist eigentlich sehr elegant. Man braucht keine Differentialrechnung dabei. Die Sekannte durch die Kreispunkte $P_1 = (2, 0)$ und $P_2 = (0, 2)$ ist die Gerade $y = -x + 2$. Diese hat Steigung $m = -1$. Diese Gerade steht senkrecht auf der Winkelhalbierenden, wie die diese Geraden aufspannenden Vektoren zeigen (Skalarprodukt Null). Verschiebt man diese Gerade parallel in Richtung der Winkelhalbierenden, landet sie schließlich im Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit dem Kreis, wird also dort zur Tangente. Da sich bei Parallelverschiebung die Steigung nicht ändert, haben wir dort Steigung $y' = m = -1$.

Bemerkung: Eine Skizze zu diesem Lösungsweg befindet sich gleichfalls im Anhang.

Lösung Aufgabe 7 (Integrieren)

Ein Körper wird aus der Ruhelage heraus mit $a(t) = 6t$ beschleunigt. Die Geschwindigkeit ergibt sich nun aus der bekannten kinematischen Formel $v'(t) = a(t)$ oder $v(t) = v_0 + \int_0^t a(r)dr = 3t^2$, da $v_0 = 0$. Der Weg wiederum aus $s'(t) = v(t)$ oder $s(t) = s_0 + \int_0^t v(r)dr = t^3$, da $s_0 = 0$. Das bedeutet für den Weg nach $t = 10$ [sec], daß $s(10) = 1$ [km].

Kontakt:

Prof. Dr. Peter Singer,

University of Applied Sciences Ingolstadt

Esplanade 10

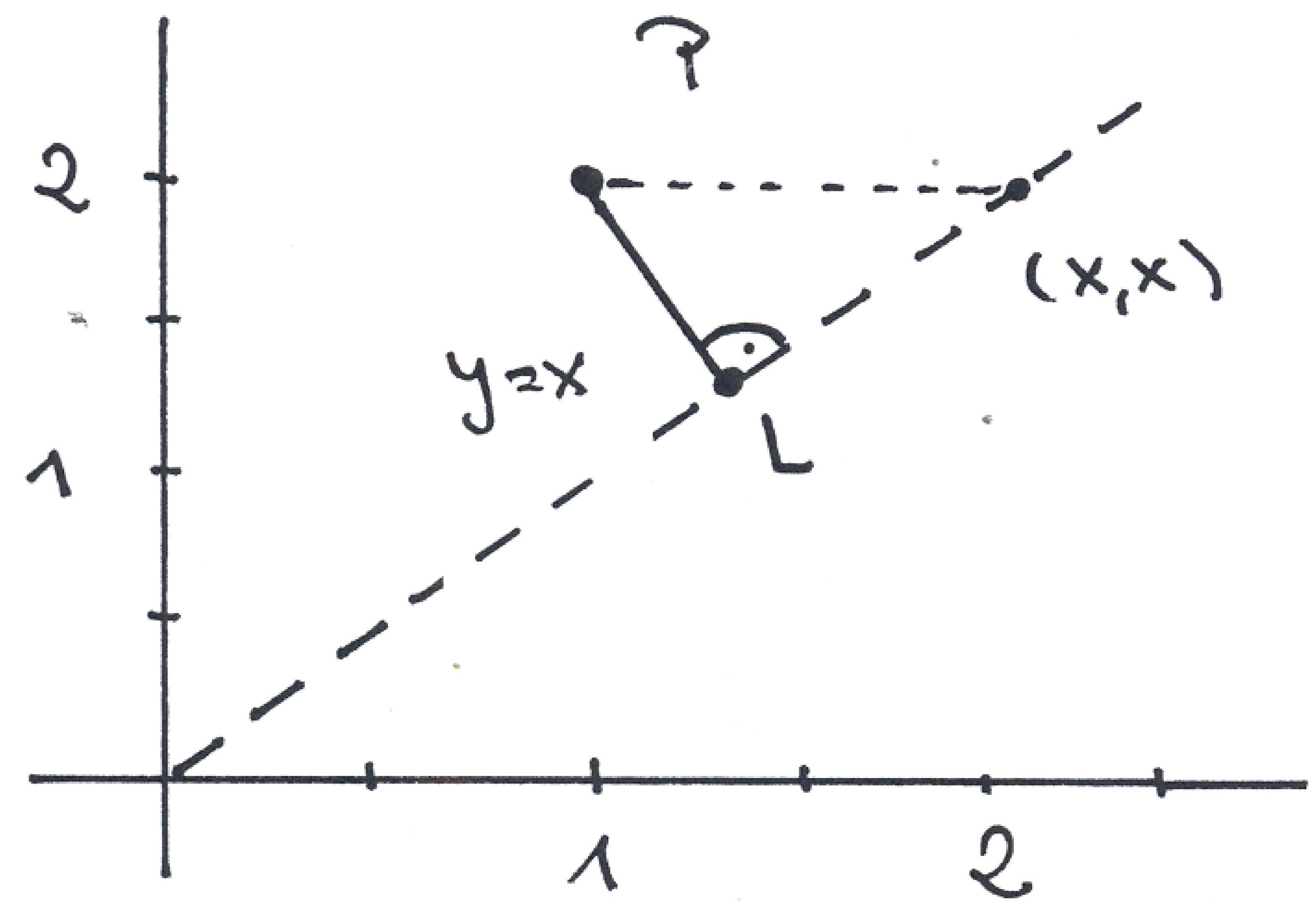
85049 Ingolstadt

peter.singer@fh-ingolstadt.de

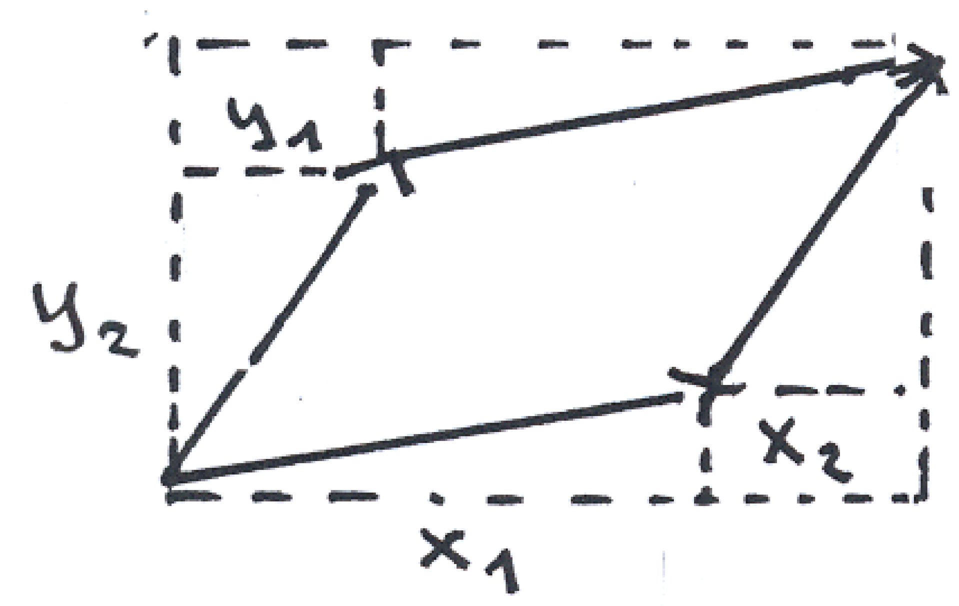
Anhang

Zu Aufgabe 4

(a)



(b)

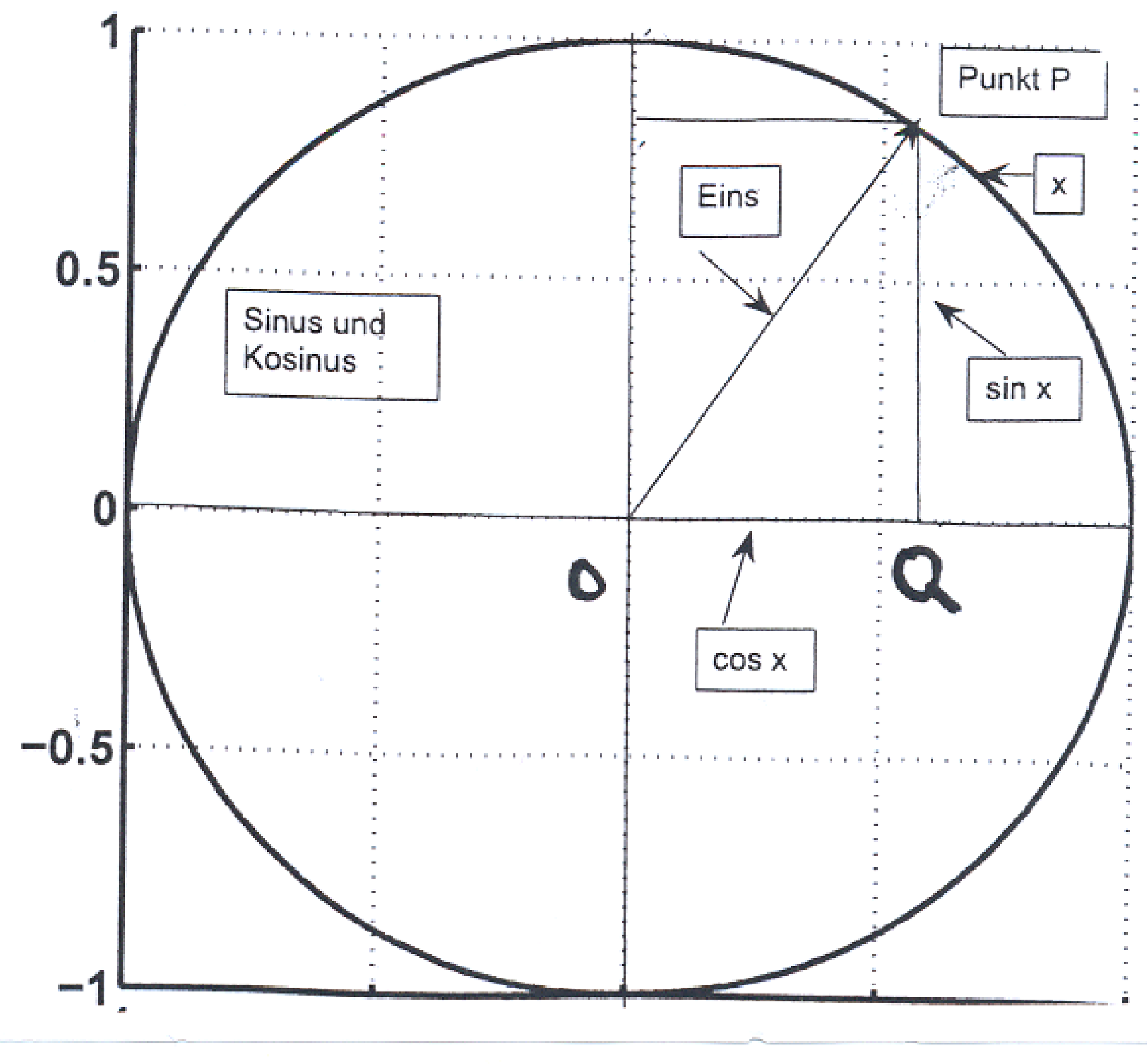


Aufspannende Vektoren des Parallelogramms

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$A = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) - 2y_1x_2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}y_1y_2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}x_1x_2$$
$$= x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2 - 2x_2y_1 - y_1y_2 - x_1x_2$$
$$= x_1y_2 - x_2y_1 =$$
$$= \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$$

Zu Aufgabe 5



Zu Aufgabe 6